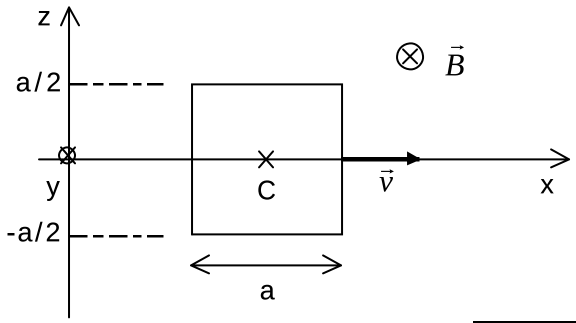
- EXERCICE 28.8 -

• ENONCE : « Moteur linéaire »



Un cadre carré, de côté a, de centre C, indéformable, conducteur de résistance R, est plongé dans un champ magnétique de la forme :

$$\boxed{\vec{B} = B_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - \omega_0 t\right)\vec{e}_y}$$

Il se déplace à la vitesse constante $\vec{v} = v\vec{e}_x \quad (v \succ 0)$, la normale au plan du cadre restant parallèle à $\vec{e}_y$, et l'on néglige les phénomènes d'auto-induction .

1) Calculer le flux $\varphi(t)$; on notera $x(t)$ l'abscisse du centre C du cadre, et l'on considérera que $x(0) = 0$.

2) En déduire la fem d'induction $e(t)$, ainsi que le courant $i(t)$ induit dans le cadre ; on posera $v_0 = \dfrac{\lambda\omega_0}{2\pi}$.

3) Calculer la force de Laplace instantanée $\vec{F}_{lap}(t)$ subie par le cadre, puis sa valeur moyenne $\left\langle \vec{F}_{lap}(t) \right\rangle_t$; montrer que la « machine » obtenue peut fonctionner en **moteur** ou en **génératrice électrique** selon le signe de $v_0 - v$.

4) En fonctionnement moteur, calculer la puissance moyenne $\left\langle P_{méca} \right\rangle$ de la machine ; pour quelle valeur du rapport $\dfrac{v}{v_0}$ cette puissance est-elle maximale ?

5) Montrer que pour $\left\langle P_{méca} \right\rangle \neq \left\langle P_{méca} \right\rangle_{\max}$, deux valeurs de v permettent d'obtenir la même puissance ; en calculant les pertes par effet Joule dans le cadre, déterminer la valeur de v qu'il vaut mieux choisir.

Rq : en notant v_1 la valeur de v inférieure à $\dfrac{v_0}{2}$ et v_2 la valeur supérieure à $\dfrac{v_0}{2}$, on se contentera d'indiquer s'il faut choisir v_1 ou v_2.

- **CORRIGE :** « Moteur linéaire »

1) On oriente le cadre dans le sens **horaire**, pour que le flux soit orienté dans le sens $+\vec{e}_y$; on a alors :

$$j(t)=\iint_{cadre}\vec{B}\cdot d\vec{S}=\iint_{cadre}B\cdot dS=\int_{x-a/2}^{x+a/2}B(x',t)adx'=aB_0\frac{l}{2p}\times\left[\sin\left(2p\frac{x'}{l}-w_0t\right)\right]_{x-a/2}^{x+a/2}$$

(en effet, $\vec{B}$ ne dépendant pas de y, on peut prendre $dS=adx'$)

On en déduit :
$$\boxed{j(t)=\frac{B_0al}{p}\times\sin\left(\frac{pa}{l}\right)\times\cos\left(\frac{2px}{l}-w_0t\right)}$$

2) La loi de Faraday permet de calculer la fem :

$$\boxed{e(t)=-\frac{dj(t)}{dt}=\frac{B_0al}{p}\times\sin\left(\frac{pa}{l}\right)\times\left(\frac{2pv}{l}-w_0\right)\times\sin\left(\frac{2px}{l}-w_0t\right)}$$

Avec $x(t)=vt+0$ et $i(t)=\dfrac{e(t)}{R}$, on obtient :

$$\boxed{i(t)=\frac{2B_0a}{R}\times\sin\left(\frac{pa}{l}\right)\times(v-v_0)\times\sin\left(\frac{2p}{l}(v-v_0)t\right)}$$

3) * sur les côtés parallèles à $\vec{e}_x$, les forces de Laplace sont portées par $\vec{e}_z$ et se compensent : pour deux points de même abscisse, le champ magnétique $\vec{B}$ est le même, mais les éléments de longueur $d\vec{l}$ sont de sens contraire.

* sur les autres côtés :

$$\vec{F}_{lap}(t)=iaB_0\cos\left[\frac{2p}{l}(vt+a/2)-w_0t\right]\vec{e}_x-iaB_0\cos\left[\frac{2p}{l}(vt-a/2)-w_0t\right]\vec{e}_x\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_{lap}(t)=-2iaB_0\times\sin\left(\frac{pa}{l}\right)\times\sin\left[\left(\frac{2pv}{l}-w_0\right)t\right]\vec{e}_x=\frac{4B_0^2a^2}{R}\times(v_0-v)\times\sin^2\left(\frac{pa}{l}\right)\times\sin^2\left[\frac{2p}{l}(v-v_0)t\right]\vec{e}_x}$$

Grâce à $\left\langle\sin^2(...)\right\rangle_t=\dfrac{1}{2}$, on en déduit :
$$\boxed{\left\langle\vec{F}_{lap}(t)\right\rangle_t=\frac{2B_0^2a^2}{R}\times(v_0-v)\times\sin^2\left(\frac{pa}{l}\right)\vec{e}_x}$$

Rq : * pour $v\prec v_0$, $\left\langle F_{lap}(t)\right\rangle_t\succ 0$, c'est-à-dire du même signe que la vitesse v $\Rightarrow$ la **puissance mécanique** de la force de Laplace est **positive** $\Rightarrow$ la machine fonctionne en **moteur**.

* pour $v\succ v_0$, $\left\langle F_{lap}(t)\right\rangle_t\prec 0$, cette même puissance mécanique est **négative** $\Rightarrow$ la machine fournirait de la puissance électrique (**générateur électrique**).

4) Par définition :
$$\boxed{\left\langle P_{méca}\right\rangle=\left\langle\vec{F}_{lap}\cdot\vec{v}\right\rangle=\left\langle F_{lap}\right\rangle\times v=\frac{2B_0^2a^2}{R}\times\sin^2\left(\frac{pa}{l}\right)\times v(v_0-v)}$$

Par dérivation de la fonction $v(v_0 - v)$, on montre que cette puissance est maximale pour $\boxed{\dfrac{v}{v_0} = \dfrac{1}{2}}$

5) L'étude de la fonction $v(v_0 - v)$ montre qu'il existe effectivement deux valeurs de vitesse permettant d'obtenir la même valeur de puissance : l'une inférieure à $v_0/2$ (soit v_1), l'autre supérieure à $v_0/2$ (soit v_2).

Les pertes moyennes par effet Joule se calculent selon :

$$\boxed{\left\langle P_J(t)\right\rangle_t = R\left\langle i^2(t)\right\rangle_t = \frac{2B_0^2 a^2}{R}\times\sin^2\left(\frac{p\,a}{l}\right)(v_0 - v)^2 = \left(\frac{v_0}{v} - 1\right)\times\left\langle P_{méca}\right\rangle}$$

Or : $v_1 \prec v_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{v_0}{v_2} \prec \dfrac{v_0}{v_1} \;\Rightarrow\;$ $\boxed{\text{il faut choisir } v_2}$

Rq : on peut constater que pour $v = v_1$, $\left\langle P_J(t)\right\rangle \succ \left\langle P_{méca}(t)\right\rangle$ et que pour $v = v_2$, $\left\langle P_J(t)\right\rangle \prec \left\langle P_{méca}(t)\right\rangle$

****